Zadanie 3.

Pokażę, że $\chi(G) = \mathsf{min}\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_m|\}$.

Bez straty ogólności załóżmy, że elementami zbiorów $S_i$ są kolejne liczby całkowite. Weźmy takie $i$, dla którego $|S_i|$ jest minimalne. Bez straty ogólności załóżmy, że $i = 1$.

Pokolorujmy teraz dla każdego $k = 1 \ldots |S_1|$ wszystkie wierzchołki postaci[1] $(k, \star, \star, \ldots, \star)$ na taki sam (ale inny dla każdego $k$) kolor. Pokażmy, że to poprawne kolorowanie. Weźmy dwa dowolne wierzchołki $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Jeśli są połączone krawędzią, to w szczególności $a_1 \neq b_1$, czyli są innego koloru.

Pokażmy, że to najmniejsze kolorowanie. Odnotujmy, że wierzchołki postaci $(k, k, k, \ldots, k)$, dla $k = 1 \ldots |S_1|$, stanowią $|S_1|$-klikę w grafie; mogą więc zostać pokolorowane na nie mniej niż $|S_1|$ kolorów.

[1] gdzie $\star$ oznacza dowolny element