Zadanie 1. Permutację $\langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ nazywamy *ciekawą* jeśli dla dokładnie jednego $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $\pi_i > i$. Znajdź zwarty wzór na liczbę ciekawych n-permutacji. *Wskazówka*: Rozważ zbiór punktów stałych ciekawej permutacji.

Rozwiązanie.

Permutacje *ciekawe* możemy podzielić na rozłączne grupy tak, że w każdej grupie znajdą się tylko te permutacje, które mają dokładnie k punktów stałych (gdzie $k = 1 \ldots n$).

1. Ile jest takich permutacji dla $k = 0$? Gdy $n = 1$ oczywiście nie możemy wskazać takiej permutacji. W przeciwnym wypadku dokładnie jedna: $\langle n, 1, 2, \ldots, n-1 \rangle$.

   Dowód. Oczywiście na pierwszej pozycji mamy $\pi_1 = k$, gdzie $1 < k \leq n$. Teraz pokażemy indukcyjnie, że $\pi_i = i - 1$ dla każdego $i > 1$.

   (Baza). Dla $i = 2$ niemożliwe jest, aby $\pi_i = 2$ (to pkt. stały) lub $\pi_i > 2$ (nieciekawa), stąd $\pi_2 = 1$. (Krok). Zakładamy, że predykat jest spełniony dla każdego $i = 2...(n-1)$; najmniejszą możliwą (bo niewykorzystaną jeszcze) wartością jest wówczas $n - 1$. Niemożliwe jest, aby $p_n = n$ (to pkt. stały) ani $p_n > n$ (nieciekawa), więc istotnie $p_n = n - 1$.

   Odnotujmy, że prawdziwość $\pi_i = i-1$ dla każdego $i > 1$ wyznacza nam jednoznacznie wartość $p_1 = n$ (w przeciwnym wypadku dwa elementy powtarzają sie w permutacji, sprzeczność).

2. Teraz rozpatrzmy liczbę permutacji dla dowolnego k. Oczywiście dla $k = n$ lub $k = n - 1$ istnieje tylko permutacja id, która nie jest ciekawa. W przeciwnym razie wybierzmy punkty stałe na $\binom{n}{k}$ sposobów. Zauważmy, że predykat ciekawości jest spełniony wtw., gdy obcięta do $n - k$ nie-stałych punktów permutacja wciąż jest ciekawa. Ale liczbę ciekawych nieporządków już obliczyliśmy (dokładnie jeden dla $n > 1$). Stąd mamy $\binom{n}{k}[k < n - 1]$ ciekawych n-permutacji z k punktami stałymi.

3. Sumując po $k = 1 \ldots n$, otrzymujemy zwarty wzór na liczbę ciekawych n-permutacji.

$$\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} = 2^n - (n+1)$$